Aprobado 4 (cuatro)

FIUBA 11-07-13 — **Análisis Matemático II** — Integrador - Tema 1

Indicar **claramente** apellido y número de padrón en cada hoja que entregue. Todas las respuestas deben estar **debidamente justificadas**. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS BIEN RESUELTOS

Nombre y Apellido: ....

Padrón: ....

1. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (x, \frac{1}{3}x^2 - y)$.

   a) Hallar la línea de campo que pasa por $(x_0, y_0) = (3,1)$.

   b) Graficar en un mismo gráfico la curva obtenida en el ítem anterior y $\vec{F}(x_0, y_0)$.

2. Hallar los extremos de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre la curva de ecuaciones $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ y $x + 2z = 3$.

3. Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (\sqrt{2+x^4} - y^2, x^2 + \sqrt{2+y^4})$ a lo largo del perímetro de la región plana $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |x| \leq y\}$. Indicar en un gráfico el sentido elegido para calcular la circulación.

4. a) Hallar el volumen de $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 2; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq \frac{z^2}{9}\}$.

   b) Definir momento de inercia respecto del eje x de un sólido $M \subset \mathbb{R}^3$ con densidad volumétrica $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ρ integrable en M y M un conjunto elemental de $\mathbb{R}^3$.

5. Hallar la circulación del campo $\vec{F}(x,y,z) = (e^{y+z}, e^{x+z}, e^{x+y})$ a lo largo de la curva definida por las ecuaciones $x^2 + z^2 = 2$ y $x + y + z = 2$. Indicar en un gráfico la orientación utilizada.

① Sea el campo vectorial $\bar{F}(x,y) = \left(x, \frac{1}{3}x^2 - y\right)$

a) Hallar la línea de campo que pasa por $(x_0, y_0) = (3,1)$

— $\bar{F}(x,y) = (F_1, F_2)$, para hallar las líneas de campo hallo:

$$\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{\frac{x^2}{3} - y} \rightarrow (x^2 - y)\,dx = x\,dy$$

$$\rightarrow \overbrace{\left(\frac{x^2}{3} - y\right)}^{P} dx + \overbrace{(-x)}^{Q} dy = 0$$

Si $P'_y = Q'_x$ entonces tengo una ec. dif. exacta y tendría que $\bar{F}$ es conservativo, pues $\bar{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ pues sus componentes son suma algebraica de polinomios y además está definida en $\mathbb{R}^2$, $\Rightarrow dom(F) = \mathbb{R}^2 \rightarrow$ simplemente conexo.

$P'_y = -1$
$Q'_x = -1$ > son = ∴ $\bar{F}$ es campo conservativo $\rightarrow \bar{F} = \nabla\varphi \rightarrow$ busco la función potencial

$\nabla\varphi = (P, Q)$

$$\begin{cases} P = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{x^2}{3} - y \xrightarrow[x]{\text{integro mom}} \varphi(x,y) = \dfrac{1}{9}x^3 - xy + \alpha_y \\ Q = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -x \quad ① \end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -x + \alpha'_y \overset{①}{=} -x \rightarrow \alpha'_y = 0 \rightarrow \alpha_y = C$$

∴ la función potencial es $\varphi(x,y) = \frac{x^3}{9} - xy + C$ $\quad C \in \mathbb{R}$

La solución general de la ec. diferencial exacta es: $\frac{x^3}{9} - xy = K$

La l. de c. que pasa por $(x_0, y_0) = (3,1) \rightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ y = 1 \end{matrix} \rightarrow \frac{3^3}{9} - 3 = \boxed{K = 0}$

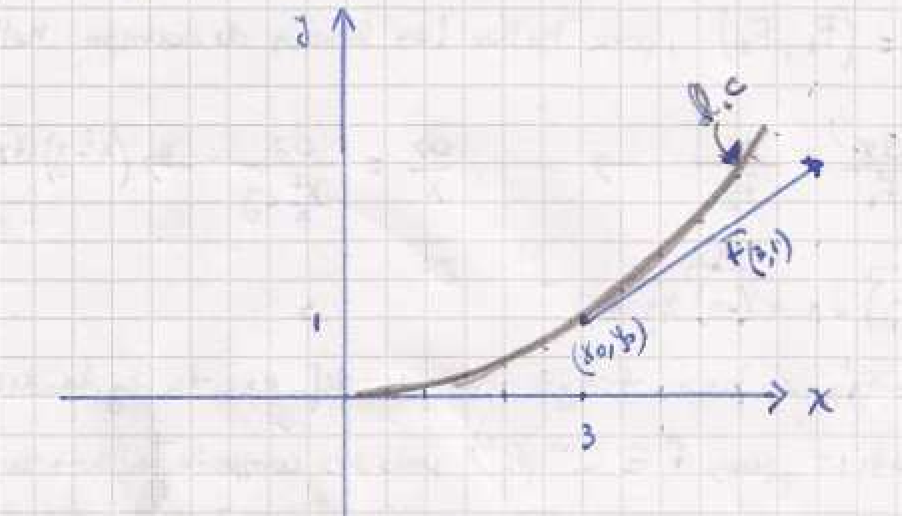
o sea, la l.c es: $\frac{x^3}{9} - xy = 0 \rightarrow \frac{x^3}{9} = xy$ Para entorno $x=3 \rightarrow x \neq 0$

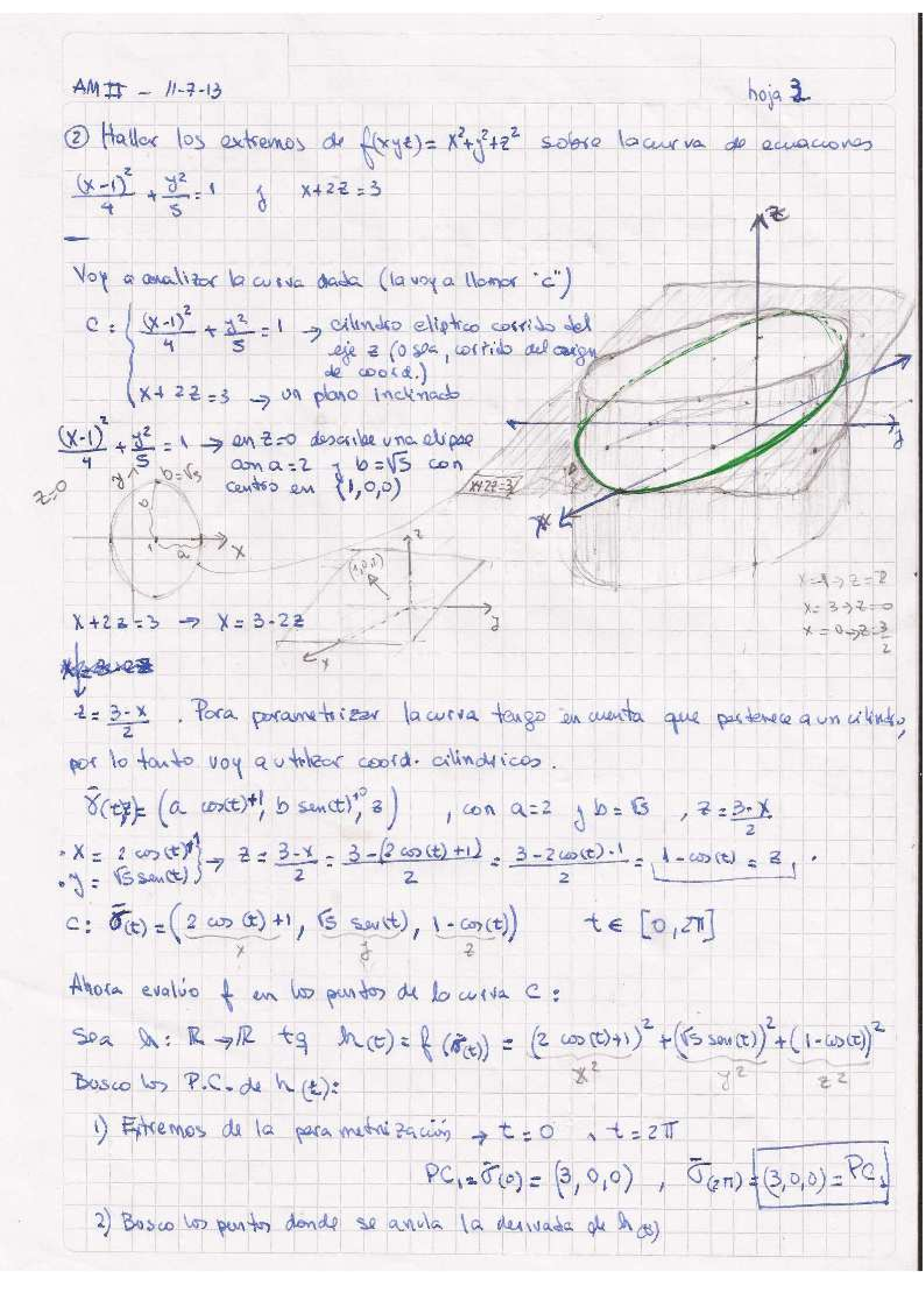
$$\boxed{y = \frac{x^2}{9}}$$

b) Graficar en un mismo gráfico la curva obtenida en el item anterior y $\bar{F}(x_0, y_0)$

---

l.c.: $y = \frac{x^2}{9}$, $\bar{F}(3,1) = (3,2)$





② Hallar los extremos de $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sobre la curva de ecuaciones

$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$ y $x+2z=3$

—

Voy a analizar la curva dada (la voy a llamar "c")

$C: \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1 \\ x+2z=3 \end{cases}$

$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$ → cilindro elíptico corrido del eje z (o sea, corrido del origen de coord.)

$x+2z=3$ → un plano inclinado

$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$ → en $z=0$ describe una elipse con $a=2$ y $b=\sqrt{5}$ con centro en $(1,0,0)$

$x+2z=3 \rightarrow x=3-2z$

$z=\frac{3-x}{2}$. Para parametrizar la curva tengo en cuenta que pertenece a un cilindro, por lo tanto voy a utilizar coord. cilíndricas.

$\bar{\gamma}(t) = (a\cos(t)+1,\ b\,\mathrm{sen}(t)+0,\ z)$, con $a=2$ y $b=\sqrt{5}$, $z=\frac{3-x}{2}$

$\left.\begin{array}{l} x = 2\cos(t)+1 \\ y=\sqrt{5}\,\mathrm{sen}(t) \end{array}\right\} \rightarrow z=\frac{3-x}{2}=\frac{3-(2\cos(t)+1)}{2}=\frac{3-2\cos(t)-1}{2}=\underline{1-\cos(t)=z}$

$C: \bar{\sigma}(t) = (\underbrace{2\cos(t)+1}_{x},\ \underbrace{\sqrt{5}\,\mathrm{sen}(t)}_{y},\ \underbrace{1-\cos(t)}_{z})$ $\quad t\in[0,2\pi]$

Ahora evalúo f en los puntos de la curva C:

Sea $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tq $h(t)=f(\bar{\sigma}(t)) = \underbrace{(2\cos(t)+1)^2}_{x^2}+\underbrace{(\sqrt{5}\,\mathrm{sen}(t))^2}_{y^2}+\underbrace{(1-\cos(t))^2}_{z^2}$

Busco los P.C. de $h(t)$:

1) Extremos de la parametrización → $t=0$, $t=2\pi$

$PC_1=\bar{\sigma}(0)=(3,0,0)$, $\boxed{\bar{\sigma}(2\pi)=(3,0,0)=PC_1}$

2) Busco los puntos donde se anula la derivada de $h(t)$

AM II 11-7-13

hoja 4

$\sigma(t) = (2\cos(t)+1, \sqrt{5}\,\text{sen}(t), 1-\cos(t))$

2. cont

$h(t) = (2\cos(t)+1)^2 + (\sqrt{5}\,\text{sen}(t))^2 + (1-\cos(t))^2 =$

$= (4\cos^2(t) + 4\cos(t) + 1) + (5\,\text{sen}^2(t)) + (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)) =$

$= 5\cos^2(t) + 5\,\text{sen}^2(t) + 2\cos(t) + 2 = 5\underbrace{(\cos^2(t) + \text{sen}^2(t))}_{1} + 2\cos(t) + 2 =$

$= 2\cos(t) + 7$

$h'(t) = -2\,\text{sen}(t)$

$h'(t) = 0 \rightarrow -2\,\text{sen}(t) = 0 \rightarrow \underbrace{t = 0 \quad o \quad t = 2\pi}_{\Rightarrow PC_1 = (3,0,0)} \quad o \quad t = \pi$

$\sigma(\pi) = \boxed{(-1, 0, 2) = PC_2}$

Como C es un conjunto compacto (cerrado y acotado) se puede utilizar el teorema de Weierstrass por lo que se asegura que exista, al menos, un máximo y un mínimo absolutos. Entonces, evalúo f en los puntos críticos hallados y decido extremos según el valor de f.

$f(PC_1) = f(3,0,0) = 9$ } f alcanza su máximo absoluto en $(3,0,0)$

$f(PC_2) = f(-1,0,2) = 5$ } f alcanza su mínimo absoluto en $(-1,0,2)$

③ Calcular la circulación del campo vectorial $\bar{F}(x,y) = (\sqrt{2+x^4} - y^2, x^2 + \sqrt{2+y^4})$ a largo del perimetro de la región plana $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, |x| \leq y\}$.
Indicar en un gráfico el sentido elegido para calcular la circulación.

Voy a analizar la forma de D:

$\begin{cases} 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 & : \text{anillo entre circ. de radios 1 y 2} \\ |x| \leq y : & x \leq y \wedge -x \leq y \end{cases}$

Como D es una región compacta cuyo borde es una curva c, cerrada y suave (a trozos)

y $\bar{F} = (P, Q) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ → pues P y Q son polinomios con raices donde sus radicandos son $\neq 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ → $\bar{F} \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Entonces puedo utilizar el teorema de Green pues se cumplen sus hipótesis ∴

$$\oint_{C+} \bar{F}\, d\bar{c} = \iint_D (Q'_x - P'_y)\, dx\, dy = \iint_D (2x + 2y)\, dx\, dy = 2\iint_D (x+y)\, dx\, dy$$

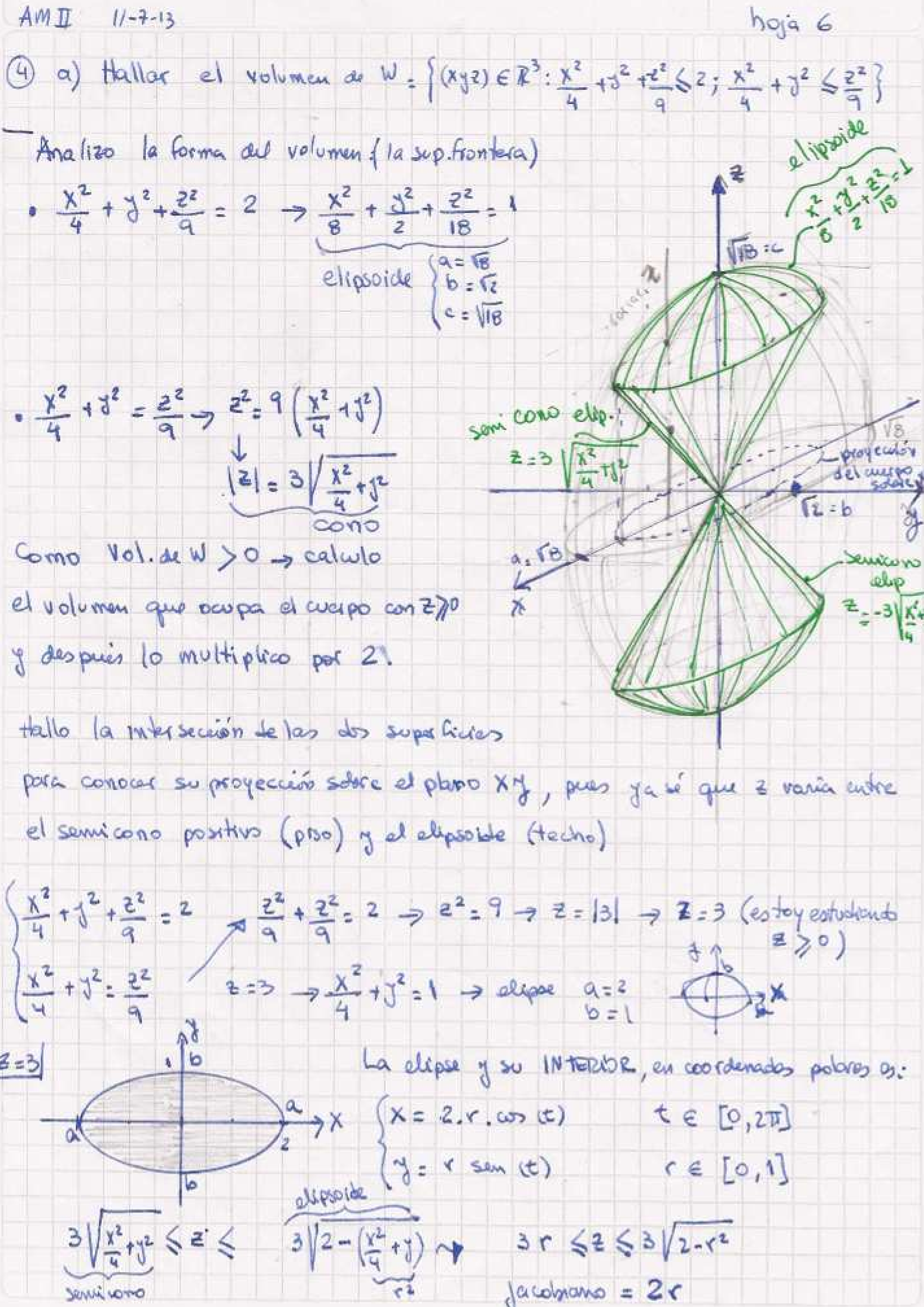
Por la forma de D conviene hacer un cambio de variable donde

$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\cos(t) \end{cases}$ con $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$, $1 \leq r \leq 2$, jacobiano $= r$

$$\therefore \oint_{C+} \bar{F}\, d\bar{c} = 2\iint_D (x+y)\, dx\, dy \underset{\text{C. variable}}{=} 2\int_{\pi/4}^{\frac{3}{4}\pi}\int_1^2 \underset{\text{Jac.}}{r}(r\cos(t) + r\,\text{sen}(t))\, dr\, dt =$$

$$= 2\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_1^2 r^2(\cos(t) + \text{sen}(t))\, dr\, dt = 2\int_{\pi/4}^{\frac{3}{4}\pi} (\cos(t) + \text{sen}(t)) \left.\frac{r^3}{3}\right|_1^2 dt = 2\int_{\pi/4}^{\frac{3}{4}\pi} (\cos(t) + \text{sen}(t))\frac{7}{3}\, dt =$$

$$= \frac{14}{3} \cdot (\text{sen}(t) - \cos(t))\Big|_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} = \boxed{\frac{14\sqrt{2}}{3} = \oint_{C+} \bar{F}\, d\bar{c}}$$



④ a) Hallar el volumen de $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}\leq 2 ;\ \frac{x^2}{4}+y^2\leq\frac{z^2}{9}\}$

Analizo la forma del volumen (la sup. frontera)

- $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=2 \rightarrow \underbrace{\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{18}=1}_{\text{elipsoide}}$ $\begin{cases} a=\sqrt{8} \\ b=\sqrt{2} \\ c=\sqrt{18}\end{cases}$

- $\frac{x^2}{4}+y^2=\frac{z^2}{9} \rightarrow z^2=9\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)$
  $\downarrow$
  $\underbrace{|z|=3\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2}}_{\text{cono}}$

Como Vol. de W > 0 → calculo el volumen que ocupa el cuerpo con $z\geq 0$ y después lo multiplico por 2.

Hallo la intersección de las dos superficies para conocer su proyección sobre el plano XY, pues ya sé que z varía entre el semicono positivo (piso) y el elipsoide (techo)

$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=2 \\ \frac{x^2}{4}+y^2=\frac{z^2}{9}\end{cases}$ ↗ $\frac{z^2}{9}+\frac{z^2}{9}=2 \rightarrow z^2=9 \rightarrow z=|3| \rightarrow z=3$ (estoy estudiando $z\geq 0$)

$z=3 \rightarrow \frac{x^2}{4}+y^2=1 \rightarrow$ elipse $\begin{matrix} a=2 \\ b=1\end{matrix}$

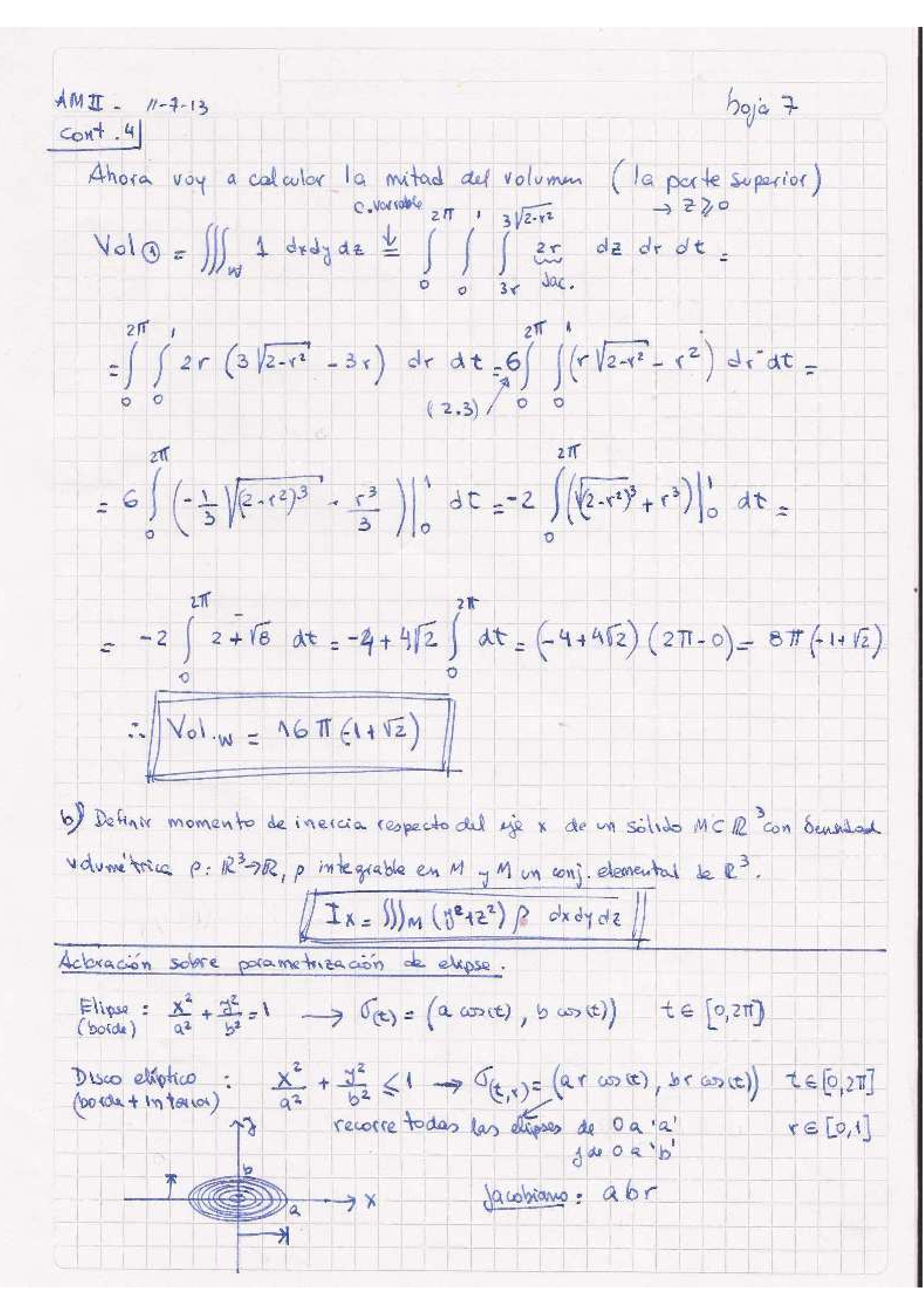
$z=3$

La elipse y su INTERIOR, en coordenadas polares es:

$\begin{cases} x=2.r.\cos(t) & t\in[0,2\pi] \\ y=r\ \text{sen}(t) & r\in[0,1]\end{cases}$

$\underbrace{3\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2}}_{\text{semicono}}\leq z\leq \overbrace{3\sqrt{2-\underbrace{\left(\frac{x^2}{4}+y\right)}_{r^2}}}^{\text{elipsoide}} \rightsquigarrow 3r\leq z\leq 3\sqrt{2-r^2}$

jacobiano $=2r$



cont. 4

Ahora voy a calcular la mitad del volumen (la parte superior) $\to z \geq 0$

$$Vol_{①} = \iiint_W 1 \, dx\,dy\,dz \underset{\text{c. variable}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{3r}^{3\sqrt{2-r^2}} \underbrace{2r}_{\text{Jac.}} \, dz\, dr\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\left(3\sqrt{2-r^2} - 3r\right) dr\, dt \underset{(2.3)}{=} 6\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r\sqrt{2-r^2} - r^2\right) dr\, dt =$$

$$= 6\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}\sqrt{(2-r^2)^3} - \frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^1 dt = -2\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{(2-r^2)^3} + r^3\right)\Big|_0^1 dt =$$

$$= -2\int_0^{2\pi} 2 - \sqrt{8}\, dt = -4 + 4\sqrt{2}\int_0^{2\pi} dt = (-4+4\sqrt{2})(2\pi - 0) = 8\pi(-1+\sqrt{2})$$

$$\therefore \boxed{Vol_W = 16\pi(-1+\sqrt{2})}$$

b) Definir momento de inercia respecto del eje x de un sólido $M \subset \mathbb{R}^3$ con densidad volumétrica $\rho: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ρ integrable en M y M un conj. elemental de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{I_x = \iiint_M (y^2+z^2)\,\rho \; dx\,dy\,dz}$$

Aclaración sobre parametrización de elipse.

Elipse (borde): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \sigma_{(t)} = (a\cos(t), b\cos(t))$ $t \in [0, 2\pi]$

Disco elíptico (borde + interior): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \longrightarrow \sigma_{(t,r)} = (a\,r\cos(t), b\,r\cos(t))$ $t \in [0, 2\pi]$, $r \in [0,1]$

recorre todas las elipses de 0 a 'a' y de 0 a 'b'

Jacobiano: abr

③ Hallar la circulación del campo $\bar{F}(x,y,z) = \left(e^{y+z}, e^{x+z}, e^{x+y}\right)$ a lo largo de la curva definida por las ecuaciones $x^2+z^2=2$ y $x+y+z=2$. Indicar, en un gráfico, la orientación utilizada.

Analizo la forma de la curva

$$C: \begin{cases} x^2+z^2=2 \rightarrow \text{cilindro con eje en el eje } y \text{, radio } \sqrt{2} \\ x+y+z=2 \rightarrow \text{plano} \end{cases}$$

Como C es la curva intersección entre un cilindro y un plano, la curva está contenida en el plano, por lo tanto la superficie que encierra tiene la misma normal que el plano $\therefore$ $N=(1,1,1)$

Como:
- S es una sup. suave orientable y $C^{\infty} \rightarrow C^2$ (∈ plano → polinomio → C^{∞})
- $C = \delta S$ es una curva suave, regular, orientada positivamente
- $\bar{F}$ tiene sus componentes funciones exponenciales $\rightarrow \bar{F} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \bar{F} \in C^1(S)$

que son las hipótesis del teorema de Stokes, puedo decir que:

$$\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S \text{rot}.\bar{F}\, d\bar{S} = \iint_S \text{rot}.\bar{F} . \frac{n}{\|n\|} . ds = \iint_S \left(e^{x+y} - e^{x+z}, e^{y+z} - e^{x+y}, e^{x+z} - e^{y+z}\right) \frac{n_{(1,1,1)}}{\|n\|} ds =$$

$$= \iint_S \left(e^{x+y} - e^{x+z} + e^{y+z} - e^{x+y} + e^{x+z} - e^{y+z}\right) \frac{1}{\|n\|} . ds = \boxed{0 = \oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l}}$$